UNIVERSITE HASSAN II
Faculté des sciences. Ain Chock
Département des Mathématiques
et Informatique

Année univérsitaire 2015/2016
Mathématiques pour les chimistes
SMC_3.

Rattrapage.
Durée: 1h 30

Exercice 1 (4 pts)
1) Montrer en utilisant le lemme de Fermat que les équations suivantes n'ont pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$
1) $3y^2 - x^2 = 7$
2) $5x^4 - y^4 = 6$

Exercice 2 (7 pts) Soit $(\star)$ la loi de composition définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \star y = (x^3 + y^3)^{\frac{1}{3}}$$

1) Montrer que $(\mathbb{R}, \star)$ est un groupe commutatif
2) Montrer que $f : \begin{array}{l} (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}, \star) \\ x \longmapsto x^{\frac{1}{3}} \end{array}$

est un isomorphisme de groupes.
On fait agir le groupe $(\mathbb{R}, \star)$ sur l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, c'est-à-dire par l'application

$$\rho : \begin{array}{l} \mathbb{R} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ (x,z) \longmapsto (x^3 + z^3)^{\frac{1}{3}}. \end{array}$$

3) Montrer que ρ est une action
4) Trouver l'orbite et le stabilisateur de $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

Exercice 3 (6 pts) 1) Calculer en intégrent plusieurs fois par parties les coefficients de Fourier réels de la fonction f telle que, sur $]-\pi, \pi[$,

$$f(x) = x\pi^2 - x^3.$$

2) En déduire les sommes suivantes:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$

Exercice 4 (3 pts) Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n^n} z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} z^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + n - 3) z^n$$