

UNIVERSITE HASSAN II  
 Faculté des sciences. Ain Chock  
 Département des Mathématiques  
 et Informatique

Année universitaire 2015/2016  
 Mathématiques pour les chimistes  
 SMC<sub>3</sub>.

**Contrôle.**  
**Durée: 1h 30**

**Exercice 1**

1) **2pts** Trouver  $\text{pgcd}(250, 150)$  et l'écrire sous la forme

$$250n + 150m$$

2) **2pts** Trouver les solutions entières de

$$250x + 150y = 100.$$

3) **2pts** Montrer que l'équation

$$3x^2 + 2 = y^2$$

n'a aucune solution dans  $\mathbb{Z}$ .

**Exercice 2**

Soit la permutation suivante

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 6 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

1) **2pts** Déterminer le nombre d'inversion et la signature  $\xi(\sigma)$  de  $\sigma$ .

2) **1pts** Décomposer  $\sigma$  en un produit de transpositions.

3) **2pts** Décomposer  $\sigma$  en un produit de cycles à support disjoint. Retrouver ainsi la valeur de  $\xi(\sigma)$ .

**Exercice 3**

Soit  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*$  muni de la loi de multiplication ( $\times$ )

1) **2pts** montrer que  $((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*, \times)$  est un groupe

On fait agir le groupe  $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*$  par multiplication sur l'ensemble  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ , c'est-à-dire par l'application

$$\rho : (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^* \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$$

$$(\bar{a}, b) \longmapsto \overline{a \times b}$$

2) **1pts** montrer que  $\rho$  est une action.

3) **2pts** Trouver l'orbite et le stabilisateur de  $\bar{4}$

**Exercice 4**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction  $2\pi$ -périodique définie sur  $] -\pi, \pi[$  par  $f(x) = x^2$ .

1) **2,5pts** Développer en série de Fourier la fonction  $f$ .

2) **2,5pts** Calculer la somme suivante

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$