UNIVERSITE HASSAN II
Faculté des sciences. Ain Chock
Département des Mathématiques
et Informatique

Année universitaire 2018/2019
Mathématiques pour les chimistes
SMC_3.

Contrôle.
Durée: 1h 30

Exercice 1
1) Démontrer que 13 divise $3^{126}+5^{126}$ et montrer par récurrence que pour tout entier naturel n que 7 divise $3^{2n+1}+2^{4n+2}$.
2) Trouver tous les entiers x vérifiant la condition suivante

$$x \equiv 3[7]$$

3) Montrer en utilisant le théorème de Fermat qu'il n'existe aucun couple d'entiers (x,y) tels que

$$x^2-3y^2=2012.$$

Exercice 2 Pour les permutations σ_1 et σ_2 suivantes, décomposer σ_1 et σ_2 en produits de cycles disjoints et en produits de transpositions

$$\sigma_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 Soit le groupe $(O_2(\mathbb{R},\bullet)$ muni de la loi de multiplication

$$O_2(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}; \qquad \theta\in\mathbb{R}\right\}.$$

1) Montrer que l'application

$$\rho: \quad O_2(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\left(\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \longmapsto \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$

est une action

2) Déterminer le stabilisateur et l'orbite de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 Déterminer la série de Fourier de la fonction périodique de période 2π définie par $f(x)=x^2$ sur $x\in[0,2\pi]$. En déduire la somme de série

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

Solution d'examen
2018 - 2019

Ex N° 1

1) a) On a $3^3 = 27 \equiv 1 [13]$

$\Rightarrow 3^{126} = 3^{3\times 42} = (3^3)^{42} \equiv 1 [13]$.

et $5^2 \equiv -1 [13]$

$\Rightarrow 5^{126} = 5^{2\times 63} \equiv (-1)^{63} [13] \equiv -1 [13]$

d'où $3^{126} + 5^{126} \equiv (1 + (-1)) [13] \equiv 0 [13]$

$\Rightarrow 13 \mid 3^{126} + 5^{126}$.

b) Pour $n = 0$ on a.
$3 + 2^2 = 7$ donc $7 \mid 3 + 2^2$.

supposons que $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{4n+2}$

et montrons que $7 \mid 3^{2(n+1)+1} + 2^{4(n+1)+2}$

En effet $3^{2(n+1)+1} + 2^{4(n+1)+2} = 3^2 \cdot 3^{2n+1} + 2^4 \cdot 2^{4n+2}$

Or $3^2 = 9 \equiv 2 [7] \Rightarrow 3^2 \cdot 3^{2n+1} \equiv 2 \cdot 3^{2n+1} [7]$
$2^4 = 16 \equiv 2 [7] \Rightarrow 2^4 \cdot 2^{4n+2} \equiv 2 \cdot 2^{4n+2} [7]$

d'où $3^{2(n+1)+1} + 2^{4(n+1)+2} \equiv 2(3^{2n+1} + 2^{4n+2}) [7]$

or d'après l'hypothèse de récurrence on a :

on a $3^{2n+1}+2^{4n+1}\equiv 0[7]$

$\Rightarrow 2\left(3^{2n+1}+2^{4n+1}\right)\equiv 0[7]$

$\Rightarrow 3^{2(n+1)+1}+2^{4(n+1)+2}\equiv 0[7]$

d'où $7 \mid 3^{2(n+1)+1}+2^{4(n+1)+2}$.

Conclusion : $\boxed{7 \mid 3^{2n+1}+2^{4n+2}}$

2) on a $x\equiv 3\ [7] \Rightarrow 7\mid x-3 \Leftrightarrow \exists y\in\mathbb{Z}$ tq

$x-3=7k \Leftrightarrow x-7y=3$ .. (E)

or $pgcd(1,7)=1\mid 3$ donc (E) admet des solution.

On a $(x_0,y_0)=(10,1)$ est une solution de E. d'où

$\begin{cases} x-7y=3 \\ x_0-7y_0=3\end{cases} \Rightarrow (x-x_0)-7(y-y_0)=0$

$\Rightarrow (x-x_0)=7(y_0-y)$

$\Rightarrow 7\mid x-x_0 \Rightarrow \exists k\in\mathbb{Z}$ tq

$(x-x_0)=7k \Rightarrow x=x_0+7k$.

er $k=(y_0-y) \Rightarrow y=y_0-k$.

$S=\{(x,y)=(x_0+7k,y_0-k)=(10-7k,1-k)\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$

2

3) • Le 1er cas $3 | x$ et $3 | y$

$\Rightarrow$ $x \equiv 0 [3]$ et $y \equiv 0 [3] \Rightarrow x^2 - 3y^2 \equiv 0 [3]$

mais on a $2012 \equiv 2 [3]$

d'où $x^2 - 3y^2 = 2012$ n'admet pas de soluts dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

• Le 2er cas $3 | x$ et $3 \nmid y$

$3 | x \Rightarrow x \equiv 0 [3] \Rightarrow x^2 \equiv 0 [3]$

et $3 \nmid y$ donc d'après le théorème de Fermat

$y^2 \equiv 1 [3] \Rightarrow -3y^2 \equiv -3 [3] \equiv 0 [3]$

d'où $x^2 - 3y^2 \equiv 0 [3] \not\equiv 2 [3]$

d'où $x^2 - 3y^2 = 2012$ n'admet pas

de solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

• Le 3er cas $3 \nmid x$ et $3 | y$

$3 | y \Rightarrow y \equiv 0 [3] \Rightarrow -3y^2 \equiv 0 [3]$

et $3 \nmid x$ d'après le théorème de Fermat

$x^2 \equiv 1 [3]$ d'où

$x^2 - 3y^2 \equiv 1 [3] \not\equiv 2 [3]$

d'où $x^2 - 3y^2 = 2012$ n'admet pas de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

• Le 4er cas $3 \nmid x$ et $3 \nmid y$

d'après le théorème de Fermat on a

$x^2 \equiv 1 [3]$ et $y^2 \equiv 1 [3]$

$\Rightarrow x^2 - 3y^2 \equiv (1 - 3) [3] \equiv -2 [3] \not\equiv 2 [3]$

d'où $x^2 - 3y^2 = 2012$ n'admet pas

de solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

EX n°2 :

Produits des cycles

$$\sigma_1 = (1\ 3\ 4\ 6) \circ (2\ 5)$$

$$\sigma_2 = (1\ 4\ 7\ 8) \circ (2\ 6\ 5\ 2)$$

Produits des transpositions

- $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cccccc|l}
3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 & \downarrow \tau_{13} \\
1 & 5 & 4 & 6 & 2 & 3 & \downarrow \tau_{2,5} \\
1 & 2 & 4 & 6 & 5 & 3 & \downarrow \tau_{63} \\
1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 6 & \downarrow \tau_{4,3} \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 &
\end{array}$$

d'où $\sigma_1 = \tau_{4,5} \circ \tau_{6,3} \circ \tau_{2,5} \circ \tau_{1,3}$.

- $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccccccccc|l}
4 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 & \downarrow \tau_{4,1} \\
1 & 6 & 9 & 7 & 2 & 5 & 8 & 4 & 3 & \downarrow \tau_{9,3} \\
1 & 6 & 3 & 7 & 2 & 5 & 8 & 4 & 9 & \downarrow \tau_{6,2} \\
1 & 2 & 3 & 7 & 6 & 5 & 8 & 4 & 9 & \downarrow \tau_{7,4} \\
1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 5 & 8 & 7 & 9 & \downarrow \tau_{5,6} \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 7 & 9 & \downarrow \tau_{8,7} \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 &
\end{array}$$

d'où $\sigma_2 = \tau_{8,7} \circ \tau_{5,6} \circ \tau_{7,4} \circ \tau_{6,2} \circ \tau_{9,3} \circ \tau_{4,1}$.

EX n°3

$$O_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} ; \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\rho : O_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\left(\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \longmapsto \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$

On a

- $$\rho\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x \times 1 - 0 \times y \\ 0 \times x + 1 \times y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- $$\rho\left(\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} ; \rho\left(\begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \right)$$

$$= \rho\left(\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} x\cos\theta_2 - y\sin\theta_2 \\ x\sin\theta_2 + y\cos\theta_2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta_1 (x\cos\theta_2 - y\sin\theta_2) - \sin\theta_1 (x\sin\theta_2 + y\cos\theta_2) \\ \sin\theta_1 (x\cos\theta_2 - y\sin\theta_2) + \sin\theta_1 (x\sin\theta_2 + y\cos\theta_2) \end{pmatrix}$$

et on a $$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} = \cancel{\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \cos\theta_2}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 & -\cos\theta_1 \sin\theta_2 - \sin\theta_1 \cos\theta_2 \\ \sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2 & -\sin\theta_1 \sin\theta_2 + \cos\theta_1 \cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

d'où $$\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) - y(\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cos\theta_2) \\ x(\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2) + y(-\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \cos\theta_2) \end{pmatrix}$$

d'où
$$\rho\left(\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \rho\left(\begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} , \rho\left(\begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \right)$$

d'où ρ est une action.

2) $\mathrm{Stab}_{O_2(\mathbb{R})}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \middle/ \rho\left(\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \right\}$

$= \cancel{\left\{ \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \middle/ \theta\in\mathbb{R} \right\}}$

$= \left\{ \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \middle/ \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \middle/ \theta\in\mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \right\} = I_2 .$

$\mathrm{Orb}_{O_2(\mathbb{R})}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \left\{ \rho\left(\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) \middle/ \theta\in\mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} \middle/ \theta\in\mathbb{R} \right\}$ = le cercle unité

EX n°4 :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos(nx)\, dx$$

$$\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = \cos(nx) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = \frac{\sin(nx)}{n} \end{cases}$$

$$a_n = \left[\frac{x^2}{\pi n} \sin(nx)\right]_0^{2\pi} - \frac{2}{\pi n} \int_0^{2\pi} x \sin(nx)\, dx$$

$$= \frac{-2}{\pi n} \int_0^{2\pi} x \sin(nx)\, dx$$

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \sin(nx) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\frac{\cos(nx)}{n} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n = -\frac{2}{\pi n} \left[\left[-\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \cos(nx)\, dx\right]$$

$$= \frac{4\pi (-1)^n}{\pi n^2} = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

$$\bullet\ a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3\pi}\right]_0^{2\pi} = \frac{8\pi^3}{3\pi} = \frac{8\pi^2}{3}.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin(nx)\, dx$$

$$\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = \sin(nx) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = -\frac{\cos(nx)}{n} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[\left[-\frac{x^2 \cos(nx)}{n}\right]_0^{2\pi} + \frac{2}{n} \int_0^{2\pi} x \cos(nx)\, dx\right]$$

$$= \frac{4\pi}{n} (-1)^{n+1} + \frac{2}{\pi n} \int_0^{2\pi} x \cos(nx)\, dx$$

Or $\displaystyle\int_0^{2\pi} x\cos(nx)\,dx$ $\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=\cos(nx) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=\frac{\sin(nx)}{n} \end{cases}$

$$= \left[\frac{x\sin(nx)}{n}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\sin(nx)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\cos(nx)\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{n^2}\left[(-1)^n - 1\right]$$

d'où

$$b_n = \frac{4\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{2}{\pi n^3}\left((-1)^n - 1\right)$$

donc

$$f(x) = \frac{8\pi^2}{6} + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n 4\cos(nx)}{n^2} + \left[\frac{4\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{2}{\pi n^3}\left((-1)^n - 1\right)\right]\sin(nx)$$

$$\Rightarrow f(0) = 0 = \frac{8\pi^2}{6} + 4\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2}.$$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{-\pi^2}{3} \Rightarrow \boxed{\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{3}}$$