UNIVERSITE HASSAN II
Faculté des sciences. Ain Chock
Département des Mathématiques
et Informatique

Année universitaire 2014/2015
Mathématiques pour les chimistes
SMC3.

Contrôle.
Durée: 1h 30

Exercice 1

1)**4pts** Trouver $pgcd(200, 14)$ et l'écrire sous la forme

$$200n + 14m$$

2)**2pts** Trouver les solutions entières de

$$200x + 14y = 4.$$

Exercice 2

Soit la permutation suivante

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1)**2pts** Déterminer le nombre d'inversion et la signature $\xi(\sigma)$ de σ.
2)**2pts** Décomposer σ en un produit de transpositions.
3)**2pts** Décomposer σ en un produit de cycles à support disjoint. Retrouver ainsi la valeur de $\xi(\sigma)$.

Exercice 3 **4pts** Soit le groupe $G =]-1, \infty[$ muni de la loi

$$x * y = \frac{xy + x + y - 2}{3}.$$

Montrer que l'application

$$f : \begin{array}{l} (G, *) \longrightarrow (\mathbb{R}_+^*, \times) \\ x \longmapsto \frac{1}{3}(x+1). \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes.

Exercice 4 1) **2pts** Etudier la nature de la série de terme général u_n

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}.$$

2)**2pts** Déterminer le rayon de convergence R de la série entière suivante

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^n.$$

Corrigé d'examen 2014 - 2015.

Ex n°1 :

- $200 = 14 \times 14 + 4$

$14 = 4 \times 3 + \boxed{2}$

$4 = 2 \times 2 + 0$

$pgcd(200, 14) = 2.$

- $2 = 14 - 4 \times 3.$

$= 14 - 3 \times (200 - 14 \times 14)$

$= 14[1 + 3 \times 14] - 3 \times 200 = 14 \times 43 - 3 \times 200$

$[2 = 200 \times (-3) + 14 \times 43.] \times 2$

$\Rightarrow 4 = 200 \times (-6) + 14(86)$

d'où $x_0 = -6$ et $y_0 = 86.$

$\Rightarrow \begin{array}{l} 200x + 14y = 4 \\ 200x_0 + 14y_0 = 4 \end{array} \Rightarrow 200(x - x_0) + 14(y - y_0) = 0$

$\Rightarrow \frac{200}{2}(x - x_0) = \frac{14}{2}(y_0 - y)$

$\Rightarrow 100 \mid 7(y_0 - y)$ et ~~on a pgcd~~

on a $pgcd(100, 7) = 1$ donc d'après le lemme de Gauss $100 \mid y_0 - y \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tq $y_0 - y = k \times 100.$

$\Rightarrow \boxed{y = -k \times 100 + y_0}$ et $\cancel{100}(x - x_0) = 7 \times k \times \cancel{100}$

$\Rightarrow \boxed{x = x_0 + 7k} \Rightarrow S = \{(y_0 - 100k, x_0 + 7k) / k \in \mathbb{Z}\}$

Ex n° 2

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1) $\begin{cases} (\sigma(1), \sigma(2)) \\ \sigma(1), \sigma(4) \\ \sigma(3), \sigma(5) \end{cases}$ $\begin{cases} \sigma(3) . \sigma(4) \\ \sigma(3) \ \sigma(5) \end{cases}$

donc le nombre d'inversion $I(\sigma) = 5$.

et la signature $\varepsilon(\sigma) = (-1)^5 = -1$.

2)

$$\begin{array}{ccccc|l} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \sigma \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 & \\ & & & & & \downarrow \tau_{4,1} \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 & \\ & & & & & \downarrow \tau_{2,4} \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 & \\ & & & & & \downarrow \tau_{5,3} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \end{array}$$

d'où

$$\sigma = \tau_{4,1} \circ \tau_{2,4} \circ \tau_{5,3}.$$

3) $\sigma = (1\ 4\ 2) \circ (3\ 5)$

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{3-1} \times (-1)^{2-1} = -1.$$

Ex n° 3 soit $G =]-1, +\infty[$ le groupe muni de la loi

$$x * y = \frac{xy + x + y - 2}{3} = \frac{y(x+1) + x + 1 - 3}{3}$$

$$= \frac{(x+1)(y+1)}{3} - 1.$$

soit $f : (G, *) \longrightarrow (\mathbb{R}_+^*, \times)$

$x \longmapsto \frac{1}{3}(x+1)$.

on a $\forall (x,y) \in G \times G$ on a

$$f(x*y) = \frac{1}{3}(x*y+1) = \frac{1}{3}\left[\frac{(x+1)(y+1)}{3} \cancel{-1} \cancel{+1}\right] = f(x) \times f(y)$$

$$= \frac{(x+1)}{3} \times \frac{(y+1)}{3}$$

(2

donc f est un homomorphisme de groupe.

- Montrons que f est bijective.

on a $\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \exists! x \in E$ tq

$$f(x) = y = \frac{1}{3}(x+1)$$

$$\Rightarrow \boxed{3y - 1 = x \in E} \quad \left(\begin{array}{l} \text{car } y > 0 \\ \Rightarrow 3y > 0 \\ \Rightarrow 3y-1 > -1 \end{array} \right)$$

d'où f est une bijection.

Conclusion f est un isomorphisme.

Ex N°4

1) $$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{(n+1)!}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n+1} \right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$\Rightarrow$ le rayon de convergence égale à $+\infty$.

2) $$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1)+1)!} \times \frac{(2n+1)!}{(-1)^n} \right|$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+2)}$$

$= 0.$

d'où le rayon de convergence égale à $+\infty$