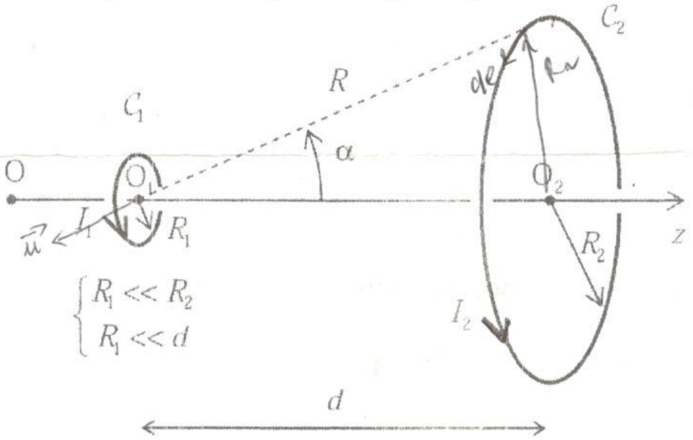
Université Hassan II, Casablanca
Faculté des Sciences, Ain Chock
Casablanca

Année universitaire 2012/2013
SMPC – S3

Epreuve d'électricité 2

Exercice 1

Considérons deux spires circulaires C_1 et C_2 coaxiales d'axe Oz de rayons R_1 et R_2 centrées en deux points O_1 et O_2 à une distance $d=O_1O_2$ l'un de l'autre et parcourues par des courants I_1 et I_2 comptés algébriquement dans le sens de rotation positif autour de l'axe Oz. Le rayon de la première spire est très petit par rapport au rayon de la seconde et par rapport à la distance d, de telle sorte que l'on puisse assimiler cette première spire à un dipôle magnétique.



1) En appliquant la loi de Biot et Savart, déterminer le champ magnétique $\vec{B}_2$ créé en O_1 par la spire C_2 parcouru par courant I_2.

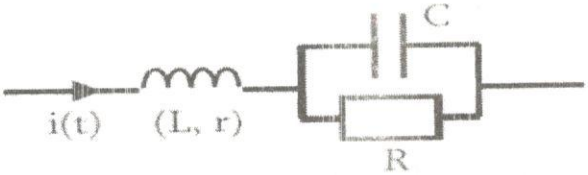
2) Donner l'expression du flux magnétique Φ_{12} créé par la spire C_2 à travers la spire C_1.

3) En déduire l'expression de la mutuelle inductance M des deux spires.

4) On place la spire C_1 dans la spire C_2 (d=0). Le courant I_2 qui circule dans la spire C_2 décroît. Déterminer le sens du courant induit i dans la spire C_1.

Exercice 2

On considère le circuit présenté ci-dessous aux bornes duquel est appliquée une tension sinusoïdale $u(t) = U_0 \cos(\omega t+\varphi)$, d'amplitude U_0 et de pulsation ω. Soit $i(t) = I_0 \cos\omega t$, le courant principal dans le circuit. I_0 est l'amplitude du courant et φ le déphasage entre u(t) et i(t).



1) Calculer l'impédance complexe du circuit.

2) Donner l'expression du déphasage.

3) A quelle condition u(t) et i(t) sont en phase.

4) Déduire la puissance moyenne <p> consommée par le circuit, en fonction de r, R, C,ω et de l'intensité efficace I_{eff}.

Exercice 3

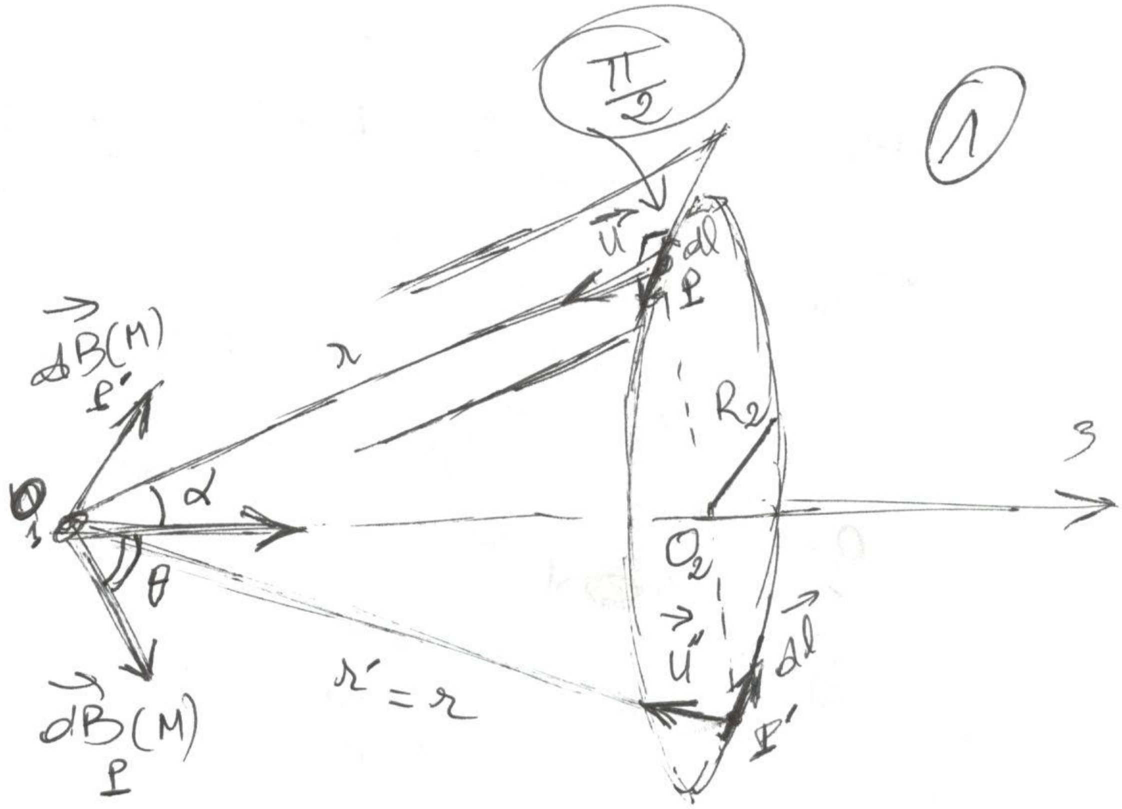
On se place dans le vide en l'absence de sources (ρ=0 et j=0).

1) Ecrire les équations de Maxwell dans le vide.

2) Le milieu est rapporté au repère orthonormé (Oxyz) usuel. On pose $\vec{E}(z,t)= E_O \cos(\omega t\text{-}kz)\,\vec{u}_x$. En déduire l'expression du champ magnétique $\vec{B}(z,t)$.

3) Déterminer le vecteur de Poynting et sa valeur moyenne.

1)



$$\boxed{\begin{cases} r' = r \\ \alpha + \theta = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \cos\theta = \sin\alpha \end{cases}}$$

Par raison de symétrie le champ résultant de toute la spire est porté par l'axe des z dans le sens des z croissants.

La composante de $\vec{dB}$ sur l'axe des z est la composante utile. $\vec{dB}\cos\theta =$

$$|\vec{B}| = \int_{spire} |\vec{dB}| \cos\theta$$

L'intégrale porte sur la spire

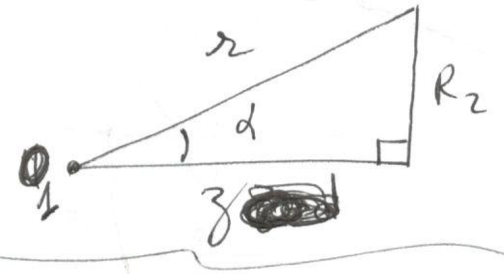
$$\vec{B}(M) \begin{cases} \text{point d'application : } O_1 \\ \text{direction : axe des } z \\ \text{sens : } z \nearrow \\ \text{module} \quad B = \displaystyle\int_{spire} \frac{\mu_0 I \, dl}{4\pi r^2} \cos\theta \end{cases}$$

$$= \int_{spire} \frac{\mu_0 I \, dl}{4\pi r^2} \sin\alpha$$

(2)

$$B = \frac{\mu_0 I \sin\alpha}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} R_2 \, d\varphi = \frac{\mu_0 I \sin\alpha}{4\pi r^2} 2\pi R_2$$

Dans le triangle,



on a : $\sin\alpha = \dfrac{R_2}{r}$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2\alpha}{R_2^2}$$

soit :
$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2 R_2} \sin^3\alpha$$

$$\Rightarrow \vec{B}_2(O_1) = \frac{\mu_0 I_2}{2 R_2} \sin^3\alpha \; \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I_2 R_2^2}{2(R_2^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z$$

l'indice "2" est relatif à la spire (2)

2) La spire C_2 étant de dimension infime, nous pouvons considérer que le champ $\vec{B}_2$ est uniforme dans le voisinage de O_1 et le flux Φ_{12} s'exprime comme le produit de $\vec{B}_2(O_1)$ par la surface de la spire (1), soit :

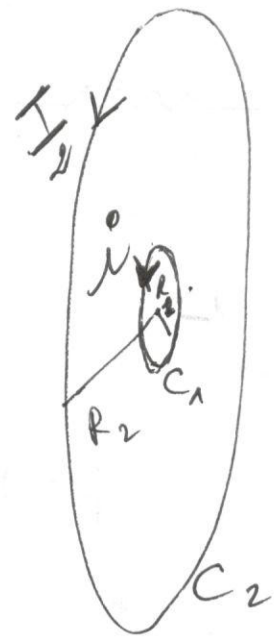
$\boxed{\vec{S}_1 \text{ est de m̂ sens que } \vec{B}_2}$

$$\Phi_{12} = \vec{B}(O_1) \vec{S}_1 = B_2 S_1 = \mu_0 \frac{\pi R_1^2 R_2^2}{2(R_2^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{I}{2}$$

3) Par définition de M : $\Phi_{12} = M I_2$,

il vient :
$$M = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 R_2^2}{2(R_2^2+d^2)^{3/2}}$$

4)



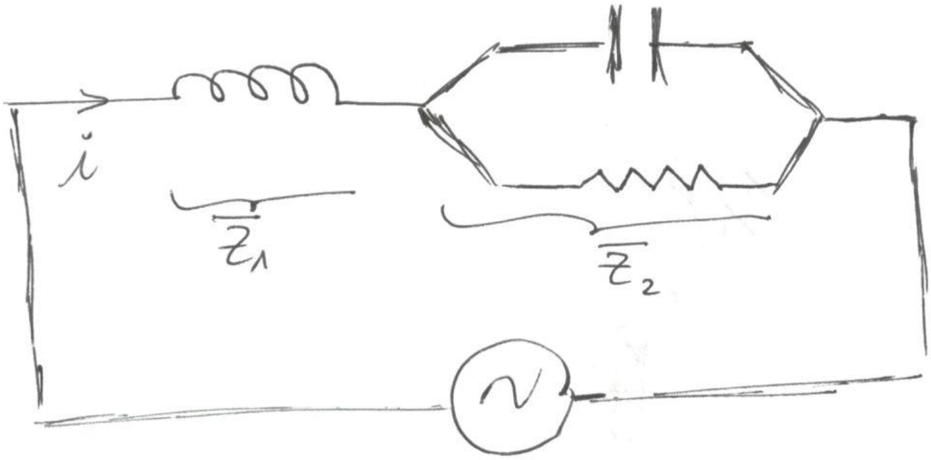
Lorsque I_2 décroît, le flux à travers la spire C_1 décroît. D'après la loi de Lenz : i le courant induit dans la spire 1 crée alors un champ magnétique tendant à compenser la diminution de flux de $\vec{B_2}$

Un flux entrant et diminuant dans le temps induit une f.e.m qui produit un flux entrant

et i circule dans le même sens que I_2

$\vec{B_2}$ créé par la spire de rayon R_2

$\vec{b}$ " " " " R_1



$$\bar{Z}_1 = r + jL\omega \quad ; \quad \frac{1}{\bar{Z}_2} = \frac{1}{R} + jC\omega = \frac{1 + jRC\omega}{R}$$

$$\bar{Z} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 = r + jL\omega + \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

$$= \frac{r(1+R^2C^2\omega^2) + R}{1 + R^2C^2\omega^2} + j\omega\left(L - \frac{R^2C}{1+R^2C^2\omega^2}\right)$$

$$= Z e^{j\alpha}$$

avec $Z = \sqrt{\left(\frac{r(1+R^2C^2\omega^2)+R}{1+R^2C^2\omega^2}\right)^2 + \omega^2\left(L - \frac{R^2C}{1+R^2C^2\omega^2}\right)^2}$

et

$$\alpha = \text{Arctg}\,\frac{\omega\left(L - \frac{R^2C}{1+R^2C^2\omega^2}\right)}{\frac{r(1+R^2C^2\omega^2)+R}{1+R^2C^2\omega^2}}$$

soit

$$\underline{\underline{\varphi = \alpha}}$$

u et i sont en phase si $\varphi = 0$

soit : $L - \frac{R^2C}{1+R^2C^2\omega^2} = 0$

$$\longrightarrow L = \frac{R^2C}{1+R^2C^2\omega^2}$$

la puissance active est :

$$P = I_{eff}\,U_{eff}\cos\varphi = Z\,I_{eff}^2\cos\varphi$$

$$= \mathrm{Re}(\overline{Z})\,I_{eff}^2$$

$$= \left[\, r\,(1+R^2C^2\omega^2) + R \,\big/\, 1+R^2C^2\omega^2 \,\right] I_{eff}^2$$

$$\overline{Z} = a + jb$$

$$\frac{Z^2}{a^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2} = 1 + \mathrm{tg}^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi}$$

$$\cos^2\varphi = \frac{a^2}{Z^2} \rightarrow \cos\varphi = \frac{a}{Z}$$

$$P = I_{eff}\,U_{eff}\cos\varphi = Z\,I_{eff}^2\cos\varphi = a\,I_{eff}^2$$

$$a = \mathrm{Re}(\overline{Z})$$

$$\boxed{P = \mathrm{Re}(\overline{Z})\,I_{eff}^2}$$

Ex 3

1) les équations de Maxwell dans le vide en l'absence des sources ($\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$) :

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

2) $$\vec{B}(z,t) = \frac{1}{c}\vec{e_z} \wedge \vec{E}(z,t)$$

$$= \frac{1}{c}\vec{e_z}\, E_0 \cos(\omega t - kz)\vec{e_x}$$

$$= \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz)\vec{e_y}$$

3) Vecteur de Poynting et sa valeur moyenne.

$$\vec{R} = \vec{E}(z,t) \wedge \vec{B}(z,t) / \mu_0$$

$$= \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz)\, \vec{e_z}$$

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{E_0^2}{2 \mu_0 c}.$$