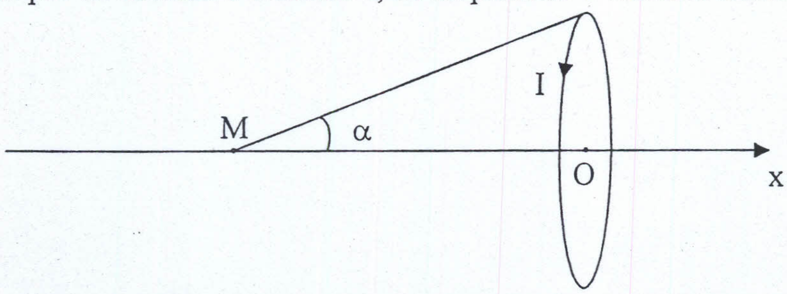
Université Hassan II Aïn Chock- Casablanca
Faculté des Sciences
Département de Physique

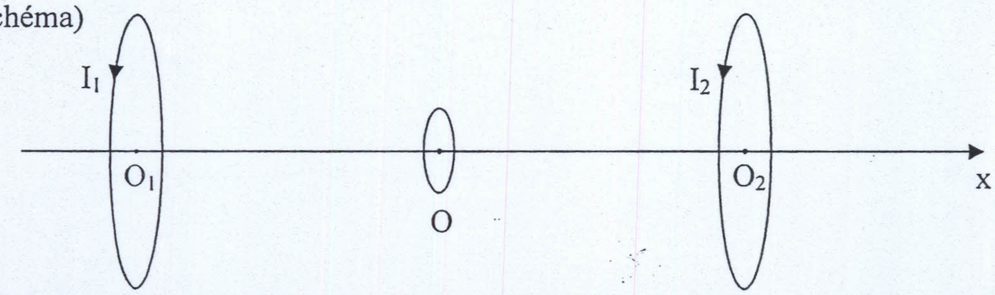
SMP/C S3 Examen janvier 2015

Exercice 1 :

4 1. Etablir l'expression du champ magnétique créé par une spire de centre O et de rayon R, parcourue par un courant d'intensité I, en un point M d'abscisse x situé sur son axe (Ox).



2. Deux spires circulaires de même rayon R, parcourues respectivement par un courant d'intensité I_1 et I_2, sont placées sur un axe (Ox). Leurs centres respectifs O_1 et O_2 sont placés aux points d'abscisse – d et d. Une troisième spire de rayon $R' \ll R$ est placée à l'origine O (voir schéma)



3 2a. En faisant une approximation que l'on précisera, donner l'expression du flux magnétique à travers la petite spire de rayon R'.

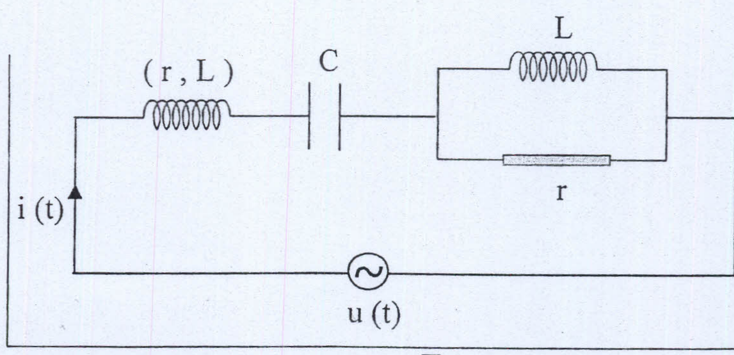
2 2b. A l'instant t = 0, I_1 augmente, I_2 restant constant.
Sans calculs, déterminer le sens du courant induit dans la spire de rayon R'. Justifier.

2 2c. Même question si à l'instant t = 0, c'est I_2 qui varie, I_1 étant constant.

2 2d. Dans le cas de la question 2c (I_1 = constante et I_2 variable), donner en fonction de $\frac{dI_2}{dt}$ l'expression du courant induit i dans la spire de rayon R' et de résistance électrique r. Retrouver le résultat de la question 2c.

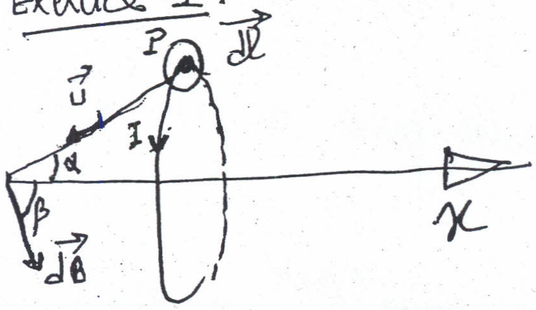
Exercice 2 :

On applique une tension sinusoïdale $u(t) = U_o \sin \omega t$ aux bornes du circuit de la figure ci-contre.
On note $i(t) = I_o \sin(\omega t + \varphi)$ le courant principale. On donne :
$r = 100\ \Omega$. $a = \frac{r}{L\omega} = 2$. $b = \frac{1}{LC\omega^2} = 3$



3 1. Donner en fonction de r, a et b, l'expression de l'impédance complexe $\overline{Z}$.
1 2. Donner la valeur numérique de Z.
2 3. En déduire la valeur de l'impédance réelle Z et le déphasage φ.
1 4. Donner la valeur de I_o, sachant que $U_o = 50$V.

Exercice 1.



Le champ magnétique en un point M de l'axe est, d'après la loi de Biot_Savart :

$$\vec{B} = \int_{spire} \vec{dB} = \int_{spire} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

* Direction de $\vec{B}$: Tout plan contenant l'axe (Ox) est un plan d'antisymétrie. Donc $\vec{B}(M)$ doit appartenir à chacun de ces plans, donc à leur intersection, qui est l'axe Ox : $\vec{B}(M)$ est orienté selon (Ox).

. Sens de $\vec{B}$: La règle des 3 doigts, par exemple, indique $\vec{B} = +B\vec{e_x}$ $(B>0)$

. Calcul de $B = \|\vec{B}\|$:

$$B = \oint \vec{B} \cdot \vec{e_x} = \left(\int \vec{dB}\right) \cdot \vec{e_x} = \int \vec{dB} \cdot \vec{e_x} = \int_{spire} \|\vec{dB}\| \cdot \cos(\vec{dB}, \vec{e_x}).$$

. $\vec{dB} \perp (\vec{dl}, \vec{u}) \longrightarrow \cos(\vec{dB}, \vec{e_x}) = \cos\beta = \sin\alpha$ (voir figure).

. $\|\vec{dB}\| = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \|\vec{dl} \wedge \vec{u}\| = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2}$ $(\vec{dl} \perp \vec{u})$.

d'où $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{spire} \frac{dl \sin\alpha}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin\alpha}{r^2} \int_{spire} dl$ puisque α et r sont constants lors de l'intégration sur la spire.

Pour finir, $\int_{spire} dl = 2\pi R \longrightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{\sin\alpha}{r^2} R$.

Comme $\sin\alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{(R^2+x^2)^{1/2}} \rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3\alpha \, \vec{e_x} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2+x^2)^{3/2}} \vec{e_x}}$

2a- Le flux à travers la spire de rayon R' est :

$\phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{dS}$

où $\vec{B}$ est le champ créé par les 2 autres spires en tout point de la surface de la spire "R'".

<u>Approximation</u> : Vu la petite taille de la spire "R'", on considère que $\vec{B}$ est le même qu'au centre O : $\vec{B} = \vec{B}(0)$.

où $\vec{B}(0)$ est le champ créé par "I_1" et "I_2" en O.

D'après la question 1 :

$$\vec{B}(0) = \vec{B}_1(0) + \vec{B}_2(0) = \frac{\mu_0 (I_1 + I_2) R^2}{2 (R^2 + x^2)^{3/2}} \vec{e_x}$$

. En prenant $\vec{dS} = + dS\vec{e_x}$, donc en choisissant comme sens positif de parcours sur la spire le sens de I_1 (ou I_2) :

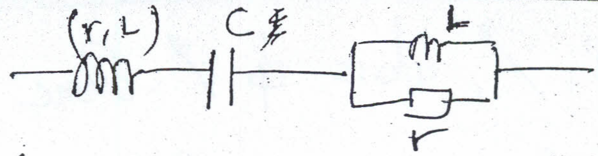
$$\phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{dS} = \iint B(0) . dS = B(0) . \pi R'^2 \text{ donc}$$

$$\boxed{\phi = \frac{\mu_0 \pi \, R^2 R'^2}{2 (R^2 + x^2)^{3/2}} (I_1 + I_2)}$$

2b. À $t = 0$, $I_1 \nearrow$ et I_2 ne varie pas.

Le flux magnétique à travers la spire "R'" varie, donc il y apparait un courant induit i, dont le sens est donné par la loi de Lenz : le sens de i doit permettre de s'opposer à la variation de ϕ.

x 2.



1. L'impédance totale complexe du circuit est

$$\overline{Z} = \overline{Z}_{r,L} + \overline{Z}_{C} + \overline{Z}_{L//r}$$

$$\overline{Z} = r + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} + \frac{jL\omega \cdot r}{jL\omega + r}$$

$$\overline{Z} = r + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) + \frac{jrL\omega\,(r - jL\omega)}{r^2 + (L\omega)^2}$$

$$\overline{Z} = \left(r + \frac{r(L\omega)^2}{r^2 + (L\omega)^2}\right) + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} + \frac{r^2 L\omega}{r^2 + (L\omega)^2}\right)$$

$$\overline{Z} = \left[r + \frac{r}{(r/L\omega)^2 + 1}\right] + jL\omega\left(1 - \frac{1}{LC\omega^2} + \frac{(r/L\omega)^2}{(r/L\omega)^2 + 1}\right)$$

Comme $L\omega = r/a$, alors :

$$\boxed{\overline{Z} = \left[\left(1 + \frac{1}{1+a}\right) + j\,\frac{1}{a}\left(1 - b + \frac{a^2}{1+a^2}\right)\right] \cdot r}$$

2°) AN.

$$\boxed{\overline{Z} = \left(\overset{6/5}{\cancel{\tfrac{4}{3}}} - \frac{3}{5}j\right) \cdot r = \left(\overset{6/5}{\cancel{\tfrac{4}{3}}} - \frac{3}{5}j\right) 100}$$

3°) $\bullet\ Z = |\overline{Z}| = \sqrt{\frac{36}{25} + \frac{9}{25}} \times 100 \simeq \boxed{\cancel{146\,\Omega}}$ $134\,\Omega$

$\varphi = \arg \overline{I} - \arg \overline{U} = \arg \frac{\overline{I}}{\overline{U}} = -\arg \overline{Z} = +\arctan \frac{3/5}{4/3}$

$$\boxed{\varphi \simeq 24°.}$$

4°) L'intensité $I_0 = \frac{U_0}{Z} = \frac{50}{134} = \boxed{\cancel{0{,}34\,A}}$ $0{,}37\,A$

2a. Le flux à travers la spire de rayon R' est :

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{dS}$$

où $\vec{B}$ est le champ créé par les 2 autres spires en tout point de la surface de la spire "R'".

Approximation : Vu la petite taille de la spire "R'", on considère que $\vec{B}$ est le même qu'au centre O : $\vec{B} = \vec{B(0)}$,

où $\vec{B(0)}$ est le champ créé par "I_1" et "I_2" en O.

D'après la question 1 :

$$\vec{B(0)} = \vec{B_1}(0) + \vec{B_2}(0) = \frac{\mu_0 (I_1 + I_2) R^2}{2 (R^2 + x^2)^{3/2}} \vec{e_x}$$

En prenant $\vec{dS} = + dS \vec{e_x}$, donc en choisissant comme sens positif de parcours sur la spire le sens de I_1 (ou I_2) :

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{dS} = \iint B(0) . dS = B(0) . \pi R'^2 \text{ donc}$$

$$\boxed{\phi = \frac{\mu_0 \pi R^2 R'^2}{2 (R^2 + x^2)^{3/2}} (I_1 + I_2)}$$

2b. À t = 0, $I_1 \nearrow$ et I_2 ne varie pas.

Le flux magnétique à travers la spire "R'" varie, donc il y apparait un courant induit i, dont le sens est donné par la loi de Lenz : le sens de i doit permettre de s'opposer à la variation de ϕ.