UNIVERSITE HASSAN II
Faculté des sciences. Ain Chock
Département des Mathématiques
et Informatique

Année univérsitaire 2015/2016
Mathématiques pour les chimistes
SMC_3.

Contrôle.
Durée: 1h 30

Exercice 1

1)**2pts** Trouver $pgcd(250, 150)$ et l'écrire sous la forme

$$250n + 150m$$

2)**2pts** Trouver les solutions entières de

$$250x + 150y = 100.$$

3)**2pts** Montrer que l'équation

$$3x^2 + 2 = y^2$$

n'a aucune solution dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 2

Soit la permutation suivante

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 6 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

1)**2pts** Déterminer le nombre d'inversion et la signature $\xi(\sigma)$ de σ.
2)**1pts** Décomposer σ en un produit de transpositions.
3)**2pts** Décomposer σ en un produit de cycles à support disjoint. Retrouver ainsi la valeur de $\xi(\sigma)$.

Exercice 3

Soit $\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\right)^*$ muni de la loi de multiplication $(\times)$

1)**2pts** montrer que $(\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\right)^*, \times)$ est un groupe

On fait agir le groupe $\left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\right)^*$ par multiplication sur l'ensemble $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, c'est-à-dire par l'application

$$\begin{aligned} \rho : \left(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}\right)^* \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \\ (\bar{a}, \bar{b}) &\longmapsto \overline{a \times b} \end{aligned}$$

2)**1pts** montrer que ρ est une action.

3)**2pts** Trouver l'orbite et le stabilisateur de $\bar{4}$

Exercice 4

Soit $f: \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi, \pi[$ par $f(x) = x^2$.

1)**2,5pts** Développer en série de Fourier la fonction f.

2)**2,5pts** Calculer la somme suivante

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

2015–2016

Solution du contrôle 2015-2016

Exercice N°1

1)

$$200 = 14\times 14 + 4$$

$$14 = 4\times 3 + \boxed{2}$$

$$4 = 2\times 2 + 0$$

$$\mathrm{pgcd}(200,4) = 2.$$

2)

$$\boxed{2} = 14 - \boxed{4}\times 3$$
$$= 14 - (200 - 14\times 14)\times 3$$
$$= 14(1 + 14\times 3) - 3\times 200.$$
$$= 43\times 14 - 3\times 200$$

d'où $\mathrm{pgcd}(200,4) = 2 = 200n + 14m$

avec $\boxed{n = -3}$ et $\boxed{m = 43}$

3) on a d'après la question 2

$$-3\times 200 + 43\times 14 = 2$$

$$\Rightarrow -6\times 200 + 86\times 14 = 4$$

$\Rightarrow (x_0, y_0) = (-6, 86)$ est une solution particulier de l'équation $200x + 14y = 4$.

d'où

$$\begin{cases} 200x_0 + y_0\times 14 = 4 \\ 200x + y\times 14 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 200(x - x_0) + 14(y - y_0) = 0 \\ \text{c-à-d } 100(x - x_0) = 7(y_0 - y) \end{cases}$$

on a $100(x - x_0) = 7(y_0 - y) \Rightarrow 7 \mid 100(x - x_0)$

et puisque $\mathrm{pgcd}(7,100) = 1$ on a d'après le lemme de Gauss $7 \mid x - x_0$

$7 \mid x - x_0 \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}$ tq $x - x_0 = k \times 7$.

$\Rightarrow \boxed{x = 7k + x_0}$

on a aussi $100(x - x_0) = 7(y_0 - y)$

$\Rightarrow \cancel{7} \times 100k = \cancel{7}(y_0 - y)$

$\Rightarrow \quad y_0 - y = 100 \times k.$

$\Rightarrow \quad y = y_0 - 100 \times k.$

d'où ~~les~~ solutions de l'équation $200x + 14y = 4$

sont $(x, y) = (7k + x_0,\ y_0 - 100 \times k)$, $k \in \mathbb{Z}$

$S = \{(7k + x_0,\ y_0 - 100 \times k)\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$

$= \{(7k - 6,\ 86 - 100 \times k)\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}.$

Exercice N°2

1) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 6 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$\left\{\begin{array}{l} (\sigma(1), \sigma(2)) \\ (\sigma(1), \sigma(3)) \\ \sigma(1), \sigma(4)) \\ (\sigma(1), \sigma(5)) \\ (\sigma(1), \sigma(6)) \\ (\sigma(1), \sigma(7)) \end{array}\right.$
$\left\{\begin{array}{l} (\sigma(2)\ \sigma(3)) \\ (\sigma(2), \sigma(7)) \end{array}\right.$
$\{(\sigma(3), \sigma(7))$
$\left\{\begin{array}{l} (\sigma(4), \sigma(5)) \\ (\sigma(4)\ \ \sigma(6)) \\ (\sigma(4), \sigma(7)) \end{array}\right.$
$\left\{\begin{array}{l} (\sigma(5), \sigma(6)) \\ (\sigma(5)\ \ \sigma(7)) \end{array}\right.$
$\{(\sigma(6), \sigma(7))$

le nombre d'inversions $\boxed{I(\sigma) = 15}$

La signature $\boxed{\varepsilon(\sigma) = (-1)^{15} = -1}$

2)

$$\begin{array}{ccccccc|l}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \sigma \\
7 & 3 & 2 & 6 & 5 & 4 & 1 & \circ\ \tau_{7,1} \\
7 & 3 & 2 & 6 & 5 & 4 & 7 & \circ\ \tau_{2,3} \\
1 & 3 & 2 & 6 & 5 & 4 & 7 & \tau_{4,6} \\
1 & 2 & 3 & 6 & 5 & 4 & 7 & \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 &
\end{array} \quad Id$$

d'où $\boxed{\sigma = \tau_{4,6} \circ \tau_{2,3} \circ \tau_{7,1}}$

3) $\sigma = (1\ 7) \circ (2\ 3) \circ (4\ 6)$

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{2-1} \times (-1)^{2-1} \times (-1)^{2-1} = -1.$$

Exercice n°3 On a $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^* = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$.

$\bar{\times}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\boxed{\bar{1}}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\boxed{\bar{1}}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\boxed{\bar{1}}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\boxed{\bar{1}}$

• donc la loi $(\bar{\times})$ est une loi de composition interne
$(\bar{\times})$ L.C.I.

$\bar{x}$	le symétrique de $\bar{x}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$

• Donc chaque élément admet un symétrique.

• On a $\bar{1} \bar{\times} \bar{x} = \bar{x} \bar{\times} \bar{1} = \bar{x}$, $\forall \bar{x} \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*$
(voir le tableau)
donc $\bar{1}$ est l'élément neutre de $((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*, \bar{\times})$

• Il est clair que $(\bar{\times})$ est associative
d'où $((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*, \bar{\times})$ est un groupe.

2015 - 2016

$$\rho : (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \longrightarrow (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$$
$$(\bar{a}, \bar{b}) \longmapsto \overline{a \times b}$$

1) $\rho(\bar{1}, \bar{a}) = \overline{1 \times a} = \bar{a}$

2) $\rho(\bar{a}_1, \rho(\bar{a}_2, \bar{b})) = \rho(\bar{a}_1, \overline{a_2 \times b})$
$$= \overline{a_1 \times (a_2 \times b)}$$
$$= \overline{a_1 \times a_2 \times b}$$
$$= \rho(\overline{a_1 \times a_2}, b).$$

d'où ρ est une action.

3)
$$\underset{((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*, \times)}{\mathrm{orb}}(\bar{4}) = \{\rho(\bar{a}, \bar{4}) \mid \bar{a} \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*\}$$
$$= \{\overline{4a} \mid \bar{a} \in \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}\}.$$
$$= \{\bar{4}, \bar{8}, \overline{12}, \overline{16}\}$$
$$= \{\bar{4}, \bar{3}, \bar{2}, \bar{1}\} = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*.$$

$$\underset{((\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*, \times)}{\mathrm{stab}}(\bar{4}) = \{\bar{a} \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^* \mid \rho(\bar{a}, \bar{4}) = \bar{4}\}.$$
$$= \{\bar{a} \in \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\} \mid \overline{4 \times a} = \bar{4}\}$$
$$= \{\bar{1}\}.$$

Exercice N°4.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi, \pi[$ par $f(x) = x^2$.

1) f étant une fonction paire donc $\boxed{b_n = 0}$ on a

$$\pi \int_{-\pi} \quad = \frac{\quad}{3\pi} [t^3]_{-\pi} = \frac{2\pi^4}{3\pi}$$

$$\boxed{a_0 = \frac{2}{3}\pi^2.}$$

et
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(nt)\,dt.$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left[\frac{t^2}{n}\sin(nt)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(nt)\,dt\right]$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(nt)\,dt.$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\left[\left[-\frac{t}{n}\cos(nt)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)\,dt\right].$$

$$= \frac{-2}{n\cancel{\pi}}\left[\frac{-\cancel{\pi}(-1)^n}{n} - \frac{\cancel{\pi}(-1)^n}{n}\right] = \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

Donc la série associée à f est

$$S(x) = \frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}.$$

f étant une fonction continue sur $\mathbb{R}$, et admet des dérivées à droite et à gauche alors

$$f(x) = S(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pour $x=0$ on a $f(0)=0$ et comme $f(0)=S(0)$

on tire $$0 = \frac{2}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{2\pi^2}{3\times 4} = \frac{\pi^2}{6}.$$