UNIVERSITE HASSAN II
Faculté des sciences. Ain Chock
Département des Mathématiques
et Informatique

Année univérsitaire 2016/2017
Mathématiques pour les chimistes
SMC_3.

Contrôle.
Durée: 1h 30

Exercice 1

1)**1pts** Trouver $pgcd(335, 15)$ et l'écrire sous la forme

$$335n + 15m$$

2)**2pts** Trouver les solutions entières de

$$335x + 15y = 20.$$

3)**2pts** Montrer en utilisant le lemme de Fermat que les équations suivantes n'ont pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$

$$x^6 + y^6 = 4$$

Exercice 2

Soit la permutation suivante

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 2 & 7 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1)**2pts** Déterminer le nombre d'inversion et la signature $\xi(\sigma)$ de σ.
2)**1pts** Décomposer σ en un produit de transpositions.
3)**2pts** Décomposer σ en un produit de cycles à support disjoint. Retrouver ainsi la valeur de $\xi(\sigma)$.

Exercice 3

Soient

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) / \qquad a \in \mathbb{R}^*,\, b \in \mathbb{R}^* \right\}$$

et

$$\rho : \quad G \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ by \end{pmatrix}$$

On muni G par la loi multiplicative $(\bullet)$.

1)**2pts** Montrer que $(G, \bullet)$ est un groupe.
2)**2pts** Montrer que ρ est une action.
3)**2pts** Décrire les orbites et les stabilisateurs.

Exercice 4

1)**2pts** Etudier la convergence des séries suivantes

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n})^n, \qquad S_2 = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^2}, \qquad S_3 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^4+1}{7n^6+1}.$$

1)**2pts** Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n, \qquad f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}z^n.$$

Solution du Contrôle
2016-2017

2016_2017

Exercice N°1

1) $335 = 15 \times 22 + \boxed{5}$

$15 = 5 \times 3 + 0$

$pgcd(335, 15) = 5.$

$5 = 335 - 15 \times 22.$

$= 335 \times n + 15\, m$

$\Rightarrow \boxed{n = 1}$ et $\boxed{m = -22.}$

2) on a $4 \times [5 = 335 - 15 \times 22]$

$\Rightarrow 20 = 4 \times 335 - 88 \times 15.$

$\Rightarrow \boxed{x_0 = 4}$, $\boxed{y_0 = -88}$

(x_0, y_0) est une solution particulière de l'équation $20 = 335x + 15y$: (E)

soit (x, y) une solution de E

$\Rightarrow \begin{cases} 335 x_0 + 15 y_0 = 20 \\ 335 x + 15 y = 20 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \frac{335}{5}(x - x_0) + \frac{15}{5}(y - y_0) = 0 \right.$

$\Rightarrow 67 (x - x_0) = 3 (y_0 - y)$

$\Rightarrow 3 \mid 67 (x - x_0)$

Puisque $pgcd(3, 67) = 1$ on a d'après le lemme de Gauss $3 \mid x - x_0 \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}$ tq $x - x_0 = 3k.$

$\Rightarrow \boxed{x = 3k + x_0}$

et $67 \times 3k = 3(y_0 - y) \Rightarrow y_0 - y = 67k$

$\Rightarrow \boxed{y = y_0 - 67k}$

d'où l'ensemble des solutions S est

$S = \{(x, y) = (3k + x_0, y_0 - 67k) = (3k + 4, -88 - 67k) \,/\, k \in \mathbb{Z}\}.$

3)

$\begin{cases} \bullet \text{ si } 7 \mid x \Rightarrow x \equiv 0[7] \Rightarrow x^6 \equiv 0[7]. \\ \bullet \text{ si } 7 \nmid x \text{ on a d'après le Lemme de Fermat } x^6 \equiv 1[7]. \end{cases}$

de même $\begin{cases} \bullet \text{ si } 7 \mid y \Rightarrow y^6 \equiv 0[7] \\ \bullet \text{ si } 7 \nmid y \Rightarrow y^6 \equiv 1[7]. \end{cases}$

donc on a 4 cas à traiter-

1er cas si $7 \mid x$ et $7 \mid y$

$$x^6 + y^6 \equiv 0\,[7] \quad \text{mais } 4 \not\equiv 0[7]$$

d'où $x^6 + y^6 = 4$ n'admet pas des solutions entières

2e cas si $7 \mid x$ et $7 \nmid y$

$$x^6 + y^6 \equiv 1\,[7] \quad \text{mais } 4 \not\equiv 1\,[7]$$

d'où $x^6 + y^6 = 4$ n'admet pas des solutions entières.

3e cas si $7 \nmid x$ et $7 \mid y$

$$x^6 + y^6 \equiv 1\,[7] \quad \text{mais } 4 \not\equiv 1\,[7].$$

d'où $x^6 + y^6 = 4$ n'admet pas des solutions entières

4e cas si $7 \nmid x$ et $7 \nmid y$

$$x^6 + y^6 \equiv 2\,[7] \quad \text{mais } 4 \not\equiv 2\,[7]$$

d'où $x^6 + y^6 = 4$ n'admet pas des solutions entières

Exercice N°2

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 2 & 7 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1)

$$\left\{\begin{array}{l}(\sigma(1),\sigma(2))\\(\sigma(1),\sigma(3))\\(\sigma(1),\sigma(5))\\(\sigma(1),\sigma(6))\\(\sigma(1),\sigma(7))\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}(\sigma(2),\sigma(3))\\(\sigma(2),\sigma(5))\\(\sigma(2),\sigma(6))\\(\sigma(2),\sigma(7))\end{array}\right. \quad \{(\sigma(3),\sigma(6)) \quad \left\{\begin{array}{l}(\sigma(4),\sigma(5))\\(\sigma(4),\sigma(6))\\(\sigma(4),\sigma(7))\end{array}\right.$$

$$\{(\sigma(5),\sigma(6))$$

2016 - 2017

Le nombres des inversions $I(\sigma)=14$.

La signature $\varepsilon(\sigma)=(-1)^{14}=1$.

2) $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\6&5&2&7&3&1&4\end{pmatrix}=\sigma$

$$\begin{array}{ccccccc|l}
6&5&2&7&3&1&4& \circ\\
1&5&2&7&3&6&4& \tau_{1,6}\\
1&5&2&4&3&6&7& \tau_{4,7}\\
1&3&2&4&5&6&7& \tau_{3,5}\\
1&2&3&4&5&6&7& \tau_{2,3}
\end{array}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\sigma=\tau_{2,3}\circ\tau_{3,5}\circ\tau_{4,7}\circ\tau_{1,6}}$

3) $\sigma=(1\ 6)\circ(2\ 5\ 3)\circ(4\ 7)$

$$\varepsilon(\sigma)=(-1)^{2-1}\times(-1)^{3-1}\circ(-1)^{2-1}=1.$$

Exercice N° 3 :

soient $G=\left\{\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})\ \middle|\ a\in\mathbb{R}^*,\ b\in\mathbb{R}^*\right\}$

et

$$\rho:\ G\times\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$$
$$\left[\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right]\longmapsto\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax\\by\end{pmatrix}$$

1) soit $\begin{pmatrix}a_1&0\\0&b_1\end{pmatrix}\in G$ et $\begin{pmatrix}a_2&0\\0&b_2\end{pmatrix}\in G$

$\Rightarrow (\bullet)$ est une L.C.I.

- on a $\forall \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in G$

- $$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est l'élément neutre de $(G, \bullet)$

- on a $\forall \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in G$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

d'où $\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$ est le symétrique de $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

- soient $\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix}$ trois éléments de $(G, \bullet)$

on a $$\left(\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}\right) \bullet \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 & 0 \\ 0 & b_1b_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1a_2a_3 & 0 \\ 0 & b_1b_2b_3 \end{pmatrix}$$

et $$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} \bullet \left[\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & b_3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2a_3 & 0 \\ 0 & b_2b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2a_3 & 0 \\ 0 & b_1b_2b_3 \end{pmatrix}$$

d'où $(\bullet)$ est associative.

si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ on a $\underset{(G,\ast)}{orb} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$.

si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ avec $y \neq 0$ $\underset{(G,\ast)}{orb} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \{0\} \times \mathbb{R}^*$

si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \neq 0 \\ y \end{pmatrix}$ $\underset{(G,\ast)}{orb} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbb{R}^* \times \{0\}$.

- $S_3 = \sum_{n}^{\infty} \frac{2n^4+1}{7n^6+1}$

Posons $w_n = \frac{2n^4+1}{7n^6+1} \underset{\infty}{\sim} \frac{2}{7n^2}$

Alors S_3 est convergente (serie de Rieman $\alpha = 2 > 1$.)

2) - $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$.

Posons $\tilde{U}_n = \frac{1}{n!}$

On a $\left| \frac{\tilde{U}_{n+1}}{\tilde{U}_n} \right| = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\tilde{U}_{n+1}}{\tilde{U}_n} \right| = 0 \Rightarrow \boxed{R = +\infty}$.

- $f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^n$.

On a $\left| \frac{\tilde{V}_{n+1}}{\tilde{V}_n} \right| = \frac{n}{n+1}$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\tilde{V}_{n+1}}{\tilde{V}_n} = 1 \Rightarrow \boxed{R = 1}$