Université Hassan II de Casablanca
Faculté des sciences Ain chock

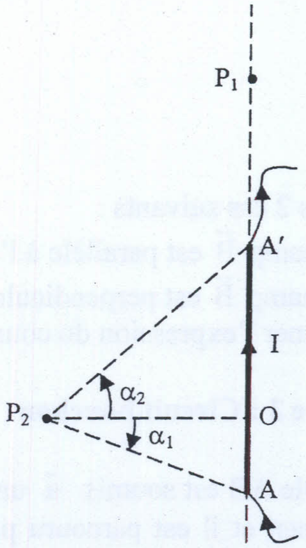
SMP-SMC S3

Examen d'électricité II

Janvier 2017 Durée : 1h 30

Exercice 1

Un fil [AA′] est parcouru par un courant d'intensité I.



PARTIE A :

1) En un point P_1 de l'axe du fil , en dehors de [AA′].

Par des considérations de symétrie, ou en utilisant la loi de Biot et Savart, déterminer le champ magnétique en un point de l'axe, non situé sur le fil.

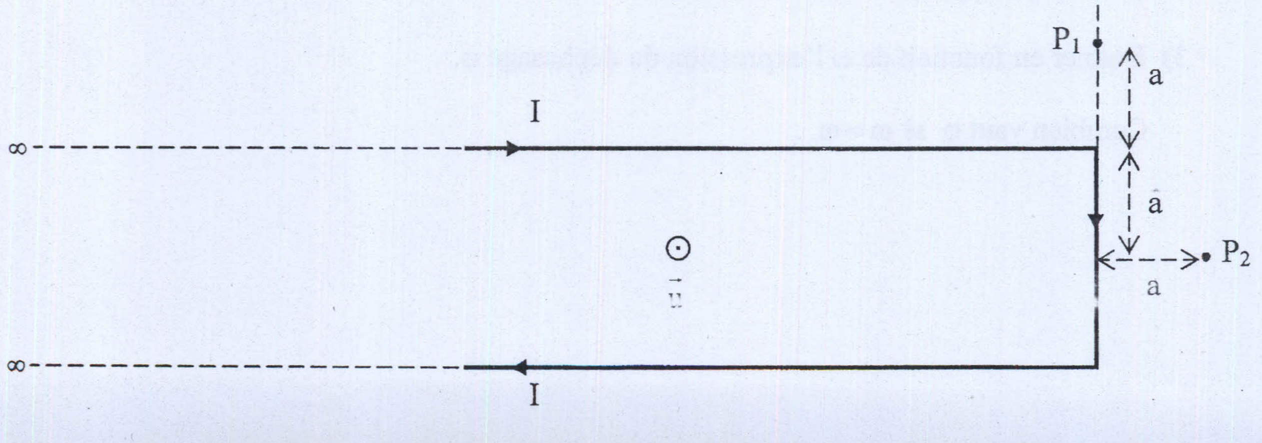
2) En un point P_2 en dehors de l'axe du fil.

Montrer que le champ produit par ce fil [AA′] en un point M quelconque est donné dans la base cylindrique par :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_\circ I}{4\pi\rho}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)\,\vec{e}_\varphi \qquad \text{où} \qquad \rho = OM \text{ est la distance de } P_2 \text{ au fil.}$$

PARTIE B : **Application**

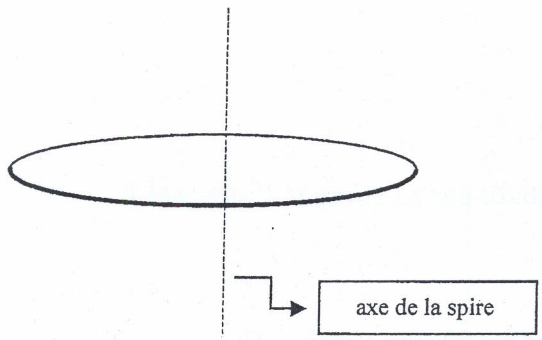
Un fil indéfini, noté ∞AB∞, parcouru par le courant I est disposé selon la figure ci-dessous. En utilisant les questions précédentes, déterminer l'expression du champ $\vec{B}(P_1)$ et $\vec{B}(P_2)$ où P_1 et P_2 sont représentés sur la figure. On utilisera le vecteur unitaire $\vec{u}$ orthogonal au plan de la figure et orienté vers l'avant.



Exercice 2

Une spire conductrice de rayon R et de résistance électrique r, est immobile dans une région de l'espace où existe un champ magnétique uniforme mais variant dans le temps selon :

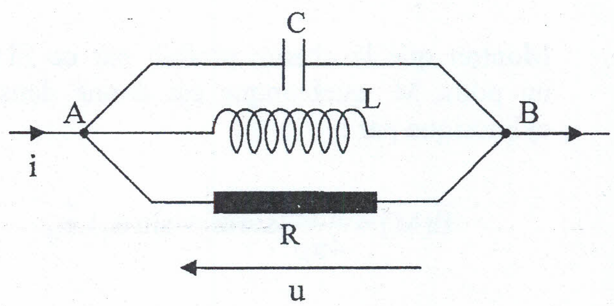
$$B = B_0.\sin\omega t \quad (B_0 \text{ et } \omega \text{ sont des constantes positives}).$$



Dans les 2 cas suivants :
a) Le champ $\vec{B}$ est parallèle à l'axe de la spire.
b) Le champ $\vec{B}$ est perpendiculaire à l'axe de la spire.
Déterminer l'expression du courant induit dans la spire.

Exercice 3 : Circuit bouchon

Un dipôle AB est soumis à une tension $u(t) = U_o \sin\omega t$ et il est parcouru par un courant d'intensité $i(t) = I_o \sin(\omega t+\varphi)$.



1) Déterminer l'impédance complexe $\overline{Z}$ du dipôle AB. On mettra $\overline{Z}$ sous la forme :

$$\overline{Z} = \frac{1}{S + jT}$$

On donnera les expressions de S et de T.

2) a- En déduire le module de l'impédance : $|\overline{Z}| = Z(\omega)$.

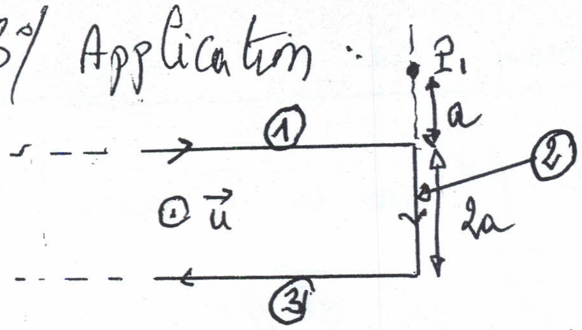
b- Si $\omega = \omega_o = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, Z(ω) passe par un maximum ou un minimum? Quelle est alors, en fonction de U_o, l'expression de I_o.

c) Justifier l'appellation circuit bouchon.

3) Donner en fonction de ω l'expression du déphasage φ.

Combien vaut φ si $\omega = \omega_o$.

3/ Application :



Principe de superposition, avec des notations évidentes :

$$\vec{B}(P_1) = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$$

- Pour $\vec{B}_1$: $\alpha_1 = -\pi/2$, $\alpha_2 = 0$, $\rho = a$, $\vec{e}_\varphi = \vec{u}$

  soit $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \vec{u}$

- $\vec{B}_2 = \vec{0}$

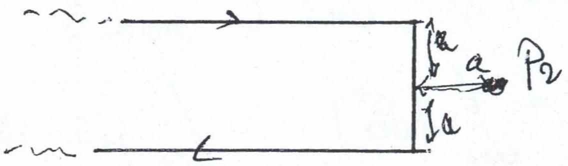
- Pour $\vec{B}_3$: $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = +\pi/2$; $\ell = 3a$; $\vec{e}_\varphi = -\vec{u}$

  soit $\vec{B}_3 = -\frac{\mu_0 I}{12\pi a} \vec{u}$

3 pts = 1+1+1

Conclusion : $\boxed{\vec{B}(P_1) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{3a}\right)\vec{u} = \frac{\mu_0 I}{6\pi a}\vec{u}}$

De même pour P_2 :



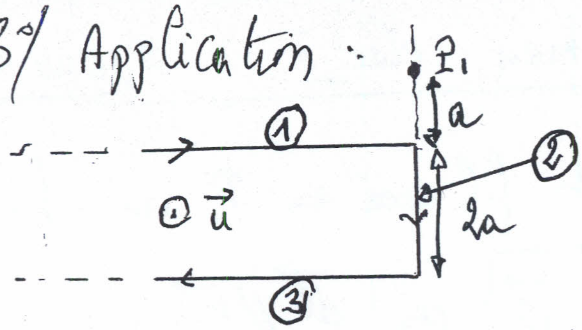
- Pour $\vec{B}_1$: $\alpha_1 = -\pi/2$, $\alpha_2 = -\pi/4$, $\ell = a$, $\vec{e}_\varphi = -\vec{u}$

  $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)\vec{u}$

- Pour $\vec{B}_2$: $\alpha_1 = -\pi/4$, $\alpha_2 = +\pi/4$, $\ell = a$, $\vec{e}_\varphi = \vec{u}$

  $\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{u} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\sqrt{2}\,\vec{u}$

3/ Application :



Principe de superposition, avec des notations évidentes :

$$\vec{B}(P_1) = \vec{B_1} + \vec{B_2} + \vec{B_3}$$

• Pour $\vec{B_1}$: $\alpha_1 = -\pi/2$, $\alpha_2 = 0$, $\rho = a$, $\vec{e_\varphi} = \vec{u}$

soit $\vec{B_1} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi a}\vec{u}$

• $\vec{B_2} = \vec{0}$

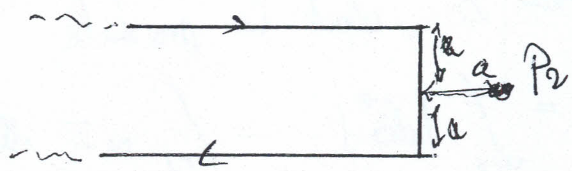
• Pour $\vec{B_3}$: $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = +\pi/2$; $\ell = 3a$; $\vec{e_\varphi} = -\vec{u}$

soit $\vec{B_3} = -\dfrac{\mu_0 I}{12\pi a}\vec{u}$

3 pts = 1 + 1 + 1

Conclusion : $\boxed{\vec{B}(P_1) = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{3a}\right)\vec{u} = \dfrac{\mu_0 I}{6\pi a}\vec{u}}$

De même pour P_2 :



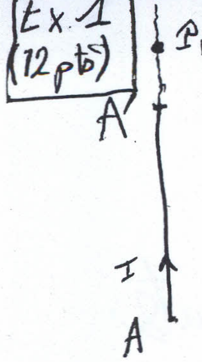
• Pour $\vec{B_1}$: $\alpha_1 = -\pi/2$, $\alpha_2 = -\pi/4$, $\ell = a$, $\vec{e_\varphi} = -\vec{u}$.

$$\vec{B_1} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)\vec{u}$$

• Pour $\vec{B_2}$: $\alpha_1 = -\pi/4$, $\alpha_2 = +\pi/4$, $\ell = a$, $\vec{e_\varphi} = \vec{u}$

$$\vec{B_2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{u} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\sqrt{2}\,\vec{u}$$

Ex. 1 (12 pts)

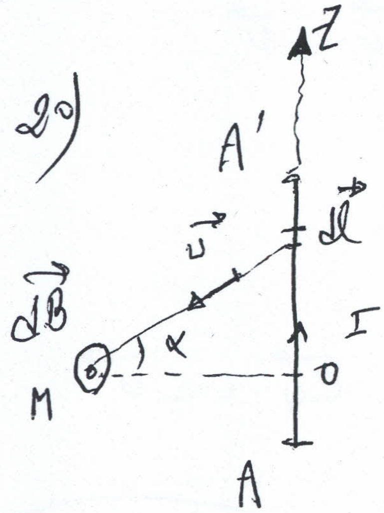


1°/ Tout élément $\vec{dl}$ du fil créé en P_1 un champ

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl} \wedge \vec{u}}{r^2} = \boxed{\vec{0}} \quad \text{car } \vec{dl} \parallel \vec{u}.$$

On peut aussi le voir par symétrie ... 2 pts

2°)



Tout élément $\vec{dl}$ créé en M un champ

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{dl} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

$\vec{dB} \perp$ Plan $(\vec{dl}, \vec{u})$ car $\vec{dB} \perp$ plan figure

(Ce plan de la figure est un plan de symétrie ce qui montre bien que $\vec{dB} \perp$ ce plan).

Le champ total en M est $\vec{B} = \int_{fil} \vec{dB}$.

Tous les $\vec{dB}$ ont même direct et sens. Il en est donc de même pour $\vec{B}$, dont le module est :

$$|\vec{B}| = \int_{fil} |\vec{dB}| = \int_{fil} \frac{\mu_0 I \, dl \, |\sin(\alpha + \pi/2)|}{4\pi r^2} \qquad (dl \equiv dz)$$

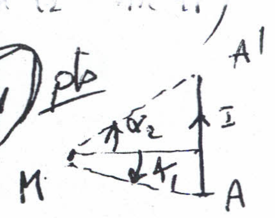
$|\sin(\alpha + \pi/2)| = \cos\alpha$ et $\tan\alpha = \frac{z}{\rho}$ $(\rho = OM)$ et $\cos\alpha = \rho/r$

$$\Rightarrow \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = dz/\rho$$

d'où
$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\rho \, d\alpha}{\cos^2\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\frac{\rho^2}{\cos^2\alpha}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} (\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)$$

Ainsi
$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} (\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1) \vec{e}_\varphi}$$

4 pts



. Pour $\overrightarrow{B_3}$: $\alpha_1 = +\pi/4$, $\alpha_2 = +\pi/2$, $\rho = a$, $\vec{e_\varphi} = -\vec{U}$. (3)

$$\overrightarrow{B_3} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{U}.$$

Conclusion $\overrightarrow{B(P_2)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \sqrt{2} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\vec{U}$

$$\boxed{\overrightarrow{B}(P_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\left(\sqrt{2} - 1\right)\vec{U}}$$

3 pts = 1+1+1

Ex 2.

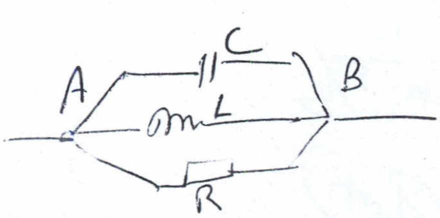
le courant induit dans la spire est $i = \frac{e}{r}$ où e est la f.e.m induite, donnée par la loi de Faraday $e = -\, d\phi/dt$ où ϕ est le flux / spire : $\phi = \iint_{\text{surf spire}} \vec{B} \cdot \vec{dS}$.

1° Cas : $\vec{B} \,/\!/\, \vec{dS} \rightarrow \phi = \iint B\, dS = B\,\pi R^2$

d'où $i = -\frac{1}{r}\,\pi R^2 \frac{dB}{dt} = \boxed{-\frac{\pi R^2}{r} B_0\, \omega \cos\omega t}$ (2pts)

2° Cas : $\vec{B} \perp \vec{dS} \longrightarrow \phi = 0 \longrightarrow \boxed{i = 0}$ (1pt)

Ex 3.



1°) L'impédance complexe $\overline{Z}$ du dipôle vérifie :

$$\frac{1}{\overline{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega$$

4

$$\frac{1}{\overline{Z}} = \frac{jL\omega + R - RLC\omega^2}{jRL\omega}$$

d'où $$\overline{Z} = \frac{jRL\omega}{jL\omega + R(1 - LC\omega^2)} = \boxed{\frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}}$$

soit $$\boxed{\overline{Z} = \frac{1}{S + jT} \quad \text{avec } S = \frac{1}{R} \text{ et } T = C\omega - \frac{1}{L\omega} = \frac{LC\omega^2 - 1}{L\omega}}$$ 2 pts

2/ a) Module $$\boxed{|\overline{Z}| = Z(\omega) = \frac{1}{\sqrt{S^2 + T^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{LC\omega^2 - 1}{L\omega}\right)^2}}}$$ 0,5 pt

b) Si $\omega = \omega_0$, $LC\omega^2 - 1 = 0$ et donc $Z(\omega_0) = R$.

Si $\omega \neq \omega_0$, $\left(\frac{LC\omega^2 - 1}{L\omega}\right)^2 > 0$ et donc $Z(\omega)$ ↘ càd que

$Z(\omega)$ passe par un $\boxed{\text{maximum}}$ en $\omega = \omega_0$.

c) Alors $\boxed{I_0 = \frac{U_0}{Z_{max}} = \frac{U_0}{R}}$ (pour $\omega = \omega_0$) 0,5 pt

Ainsi, I_0 est minimum pour $\omega = \omega_0$: les fréquences voisines de $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ sont stoppées d'où le nom de circuit bouchon. 0,5 pt

3/ le déphasage $\varphi(\omega) = -\arg \overline{Z}(\omega)$

Or $\arg \overline{Z}(\omega) = -\arg(S + jT) = -\arctan T/S$

donc $$\boxed{\varphi(\omega) = \arctan \frac{LC\omega^2 - 1}{L\omega} \cdot R}$$ 1 pt

Si $\omega = \omega_0$, alors $\varphi(\omega) = \arctan 0 = 0$ 0,5 pt